$\boxed{115}$ $0 \leqq \theta < 2\pi$ をみたす θ と正の整数 m に対して，$f_m(\theta)$ を次のように定める．

$$f_m(\theta) = \sum_{k=0}^{m} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{3}\right)$$

(1) $f_5(\theta)$ を求めよ．

(2) θ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲を動くとき，$f_4(\theta)$ の最大値を求めよ．

(3) m がすべての正の整数を動き，θ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲を動くとき，$f_m(\theta)$ の最大値を求めよ．

No.

Date

115 $0 \leqq \theta < 2\pi$ をみたす θ と正の整数 m に対して，$f_m(\theta)$ を次のように定める．

$$f_m(\theta)=\sum_{k=0}^{m}\sin\left(\theta+\frac{k\pi}{3}\right)$$

(1) $f_5(\theta)$ を求めよ．

(2) θ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲を動くとき，$f_4(\theta)$ の最大値を求めよ．

(3) m がすべての正の整数を動き，θ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲を動くとき，$f_m(\theta)$ の最大値を求めよ．

$$\begin{cases} f_m(\theta)=\sum_{k=0}^{m} g_k(\theta) \\ \text{ただし，} g_k(\theta)=\sin\left(\theta+\frac{k\pi}{3}\right) \end{cases}$$

$(m \in \mathbb{N},\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$

$f_m(\theta)$ … m と θ の2変数関数

独立

(i) まず m 固定，θ 変化 → 最大値 G_m

(ii) 次に m を変化 → G_m の最大値 $= f_m$ の

限定できる

(1)(2)(3)で これをやらせようとしている

三角関数の 本質 ― 周期性

$\sin\theta$ の周期は 2π だから

$$g_{k+6}(\theta)=\sin\left(\theta+\frac{k+6}{3}\pi\right)$$
$$=\sin\left(\theta+\frac{k}{3}\pi+2\pi\right)$$
$$=\sin\left(\theta+\frac{k\pi}{3}\right)=g_k(\theta)$$

が k によらず成り立つ．

また，

$$g_{k+3}(\theta)=\sin\left(\theta+\frac{k+3}{3}\pi\right)$$
$$=\sin\left(\theta+\frac{k}{3}\pi+\pi\right)$$
$$=-\sin\left(\theta+\frac{k}{3}\pi\right)$$

が k によらず成り立つ．

(1) ②を用いると，

$$f_5(\theta)=g_0(\theta)+g_1(\theta)+g_2 \ldots$$
$$=0$$

(2) $f_4(\theta)=f_5(\theta)-g_5(\theta)$ ← (1)を利用

$$=0-\{-g_2(\theta)\}$$
$$=g_2(\theta)$$
$$=\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)$$

であるから，$0 \leqq \theta < 2\pi$ …

$f_4\left(\frac{11}{6}\pi\right)=1$

(iii) $f_3(\theta)=f_2(\theta)+g_3(\theta)$

$$=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta-g_0(\theta)$$
$$=\sqrt{3}\cos\theta$$

∴ $(f_3(\theta)$ の最大値$)=f_3(0)=\sqrt{3}$

(iv) $(f_4(\theta)$ の最大値$)=1$ （∵ (2)より）

(v) $(f_5(\theta)$ の最大値$)=0$ （∵ (1)より）

(vi) $f_6(\theta)=f_5(\theta)+g_6(\theta)$

$$=0+g_0(\theta)$$
$$=\sin\theta$$

∴ $(f_6(\theta)$ の最大値$)=f_6\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

以上より，$f_m(\theta)$ $(m \in \mathbb{N},\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$ の最大値は

2 $\left(m=6N+2,\ \theta=\frac{\pi}{6}\right)$