

---

102 (1)  $x, a$  を実数とするとき,

$$\left[ x+a > 0 \text{ ならば } x > 0 \right]$$

が成立するための,  $a$  に対する必要十分条件を求めよ.

(2)  $x, y, a$  を実数とするとき,

$$\left[ x^2 + y^2 \leq 2ax \text{ ならば } x^2 + y^2 \leq 2x + 4y + 20 \right]$$

が成立するための,  $a$  に対する必要十分条件を求めよ.

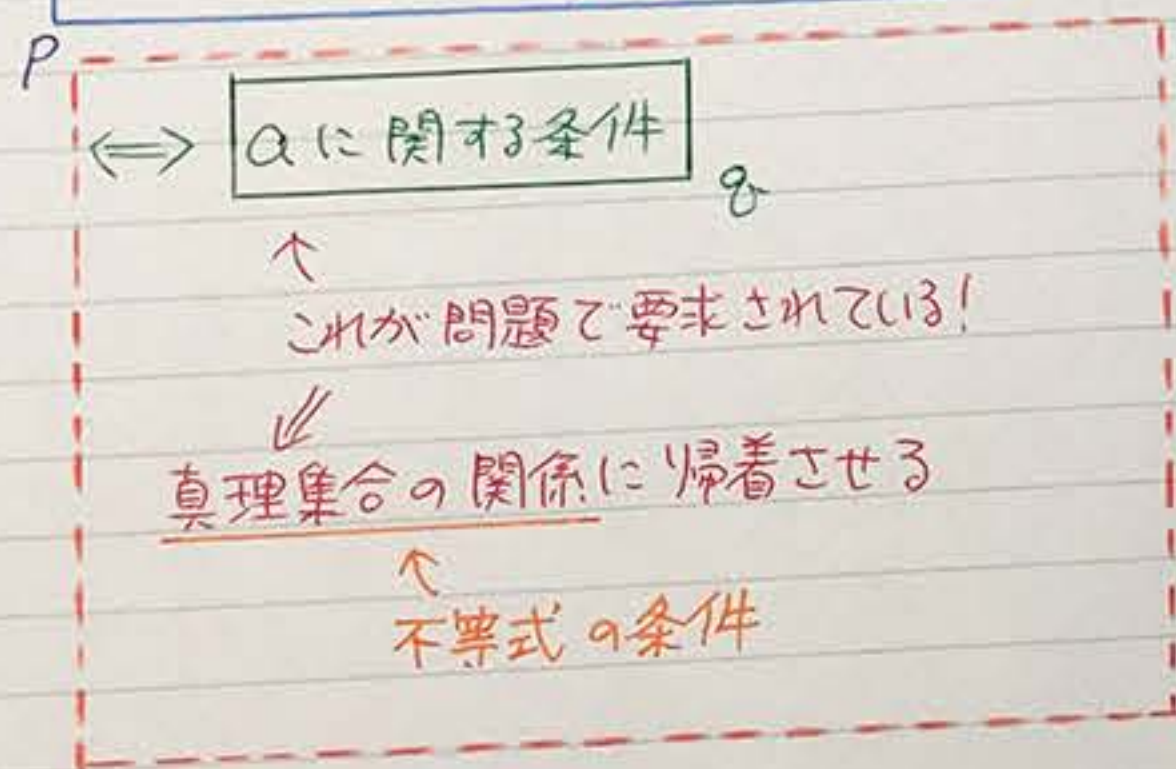
---

---

- 102 (1)  $x, a$  を実数とするとき,  
「 $x+a>0$  ならば  $x>0$ 」  
が成立するための,  $a$  に対する必要十分条件を求めよ.  
(2)  $x, y, a$  を実数とするとき,  
「 $x^2+y^2 \leq 2ax$  ならば  $x^2+y^2 \leq 2x+4y+20$ 」  
が成立するための,  $a$  に対する必要十分条件を求めよ.

["ならば"命題] と 真理集合

(1) 「 $\forall x, x+a>0 \iff x>0$ 」... ①  
ならば



①が成立する(真)  
 $\{x \mid x+a>0\} \subseteq \{x \mid x>0\}$   
"="も含む

であるから, ②が成り立つための  $a$  に  
求めればよい.

→  $x$  だけの変数だから  $x$  平面上だけで考  
(数直線)

(2) (1)と同じ型の問題

$P = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2ax\}$

$Q = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x + 4y + 20\}$

とあるとき,

「 $P \subset Q$ 」... (\*) ← (Point) と

となるような  $a$  に対する条件を求め

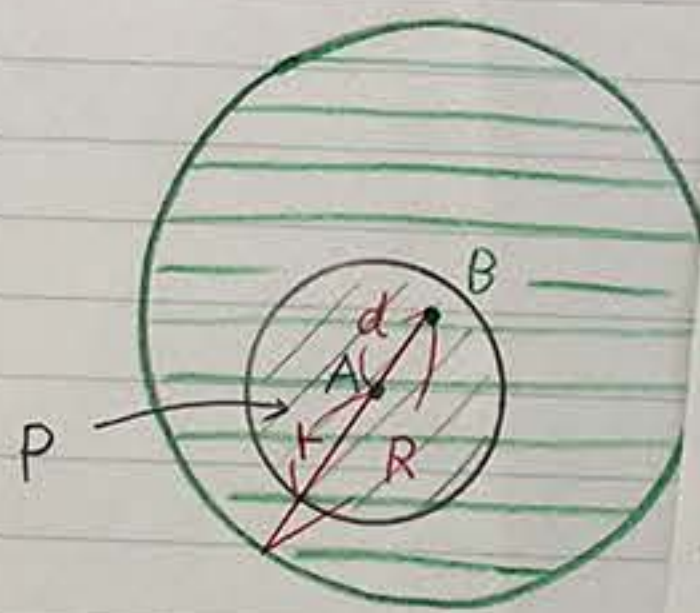
ここで,  $x, y$  平面上で

・  $P$  は中心  $A(a, 0)$ , 半径  $r = |a|$

・  $Q$  は中心  $B(1, 2)$ , 半径  $R = 5$

のそれぞれ円板を表すので (点  $A$ )

(\*)  $\iff AB \leq R - r$  かつ  
0以上 含まれる  
 ABの直線距離



$\iff \sqrt{(a-1)^2 + (0-2)^2} \leq 5 - |a|$

$\iff (a-1)^2 + 4 \leq (5 - |a|)^2$  かつ  $5 - |a| \geq 0$

(Point) ③

無理不等式の同値変形

$\sqrt{P} \leq Q \iff 0 \leq P \leq Q^2$  かつ  $Q \geq 0$

本問では成立

(ex)  $\sqrt{x} \leq 2$   
 $\iff 0 \leq x \leq 4$   
 かつ  $2 \geq 0$   
 $\iff 0 \leq x \leq 4$

(cf)  $\sqrt{P} \geq Q \iff P \geq Q^2$  または " $P \geq 0$  かつ  $Q \leq 0$ "  
 (ex)  $\sqrt{x} \geq -1 \iff x \geq 1$  または " $x \geq 0$  かつ  $-1 \leq 0$ "  
 $\iff x \geq 0$

$\iff -2a + 5 \leq 25 - 10|a|$  かつ  $|a| \leq 5$

$\iff 5|a| \leq a + 10$  かつ  $|a| \leq 5$  }  $|A| \leq B \iff -B \leq A \leq B$

$\iff -(a+10) \leq 5a \leq a+10$  かつ  $-5 \leq a \leq 5$

$\iff -\frac{5}{3} \leq a \leq \frac{5}{2}$  ... (答)

である.